



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JOSÉ GABRIEL GOUVEIA SILVA

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA E COMBINATÓRIA DO *STOMACHION*

JOÃO PESSOA

2020

JOSÉ GABRIEL GOUVEIA SILVA

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA E COMBINATÓRIA DO *STOMACHION*

Monografia de graduação apresentada ao Centro de Ciências Exatas e da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

JOÃO PESSOA

2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586a Silva, Jose Gabriel Gouveia.

Uma abordagem histórica e combinatória do Stomachion /
Jose Gabriel Gouveia Silva. - João Pessoa, 2020.
32 f. : il.

Orientação: Eduardo Gonçalves dos Santos.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. História da matemática. 2. História da análise
combinatória. 3. Stomachion. 4. Arquimedes de Siracusa.
I. Santos, Eduardo Gonçalves dos. II. Título.

UFPB/BC



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

Ata da Apresentação e Defesa de Trabalho
Acadêmico de Conclusão de Curso do
estudante José Gabriel Gouveia da Silva.

Ao primeiro dia do mês de abril de dois mil e vinte, através de apresentação oral gravada em vídeo, em virtude da Portaria 90/2020, GR, realizou-se a Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática do estudante **José Gabriel Gouveia da Silva**, intitulado “**Uma abordagem Histórica e Combinatória do *Stomachion***”, sob a orientação do Professor Eduardo Gonçalves dos Santos, na qualidade de Orientador e Presidente da Banca Examinadora, tendo como avaliadores integrantes da Banca as Professoras **Rogéria Gaudêncio do Rêgo** e **Valdenilza Ferreira da Silva**. A Banca Examinadora, com base em pareceres relativos ao texto e à apresentação, decidiu pela **APROVAÇÃO** do Trabalho de Conclusão de Curso do estudante **José Gabriel da Silva**, com média final 8,5 (oito vírgula cinco). Nada mais havendo a tratar, eu **Eduardo Gonçalves dos Santos**, na qualidade de Presidente da Banca, lavro a presente Ata que, lida e aprovada pelos demais membros da banca, assino.

João Pessoa, 08 de maio de 2020

Eduardo Gonçalves dos Santos

Eduardo Gonçalves dos Santos (orientador)

SIAPE: 11256850

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pela força e coragem em toda a minha vida, sem Ele jamais teria conseguido chegar onde estou.

Agradeço a todos os meus amigos que o curso me apresentou em especial a Alberdan Rafael, Aluízio Neto, Lucas Pinheiro, Rodrigo Gomes, Emanuel “Japa”, e a todos os membros do Centro Acadêmico de Matemática (CAMAT) que me ajudaram durante esta longa caminhada.

Quero agradecer aos meus pais, Inácia Gouveia de Araújo e Joaquim Severino Silva, aos meus avós, a toda minha família e amigos por me apoiar nesta luta que foi concluir esta licenciatura. A todos os professores que me ensinaram a perseverar, em especial ao Professor Hildebrando, “tio Hildo” que me apoiou durante o ensino básico onde eu mal tinha condições de estudar.

A todos os integrantes do “Busão da Ostentação” que juntos enfrentamos viagens de Itabaiana a João Pessoa todo dia para conquistar nossos sonhos, sofrendo com dias de trânsito, problemas mecânicos, as mais diversas “aventuras”. De todos quero agradecer em especial aos que compartilharam as idas e vindas ao meu lado nas viagens: Júnior Noberto, Juanh Carlos, Jéssica Natalia, Dailson Tavares, Horácio Honorato, Rogério Narciso, Lucas Henrique, Eva Aynara, Márcia Morgana, Flávia Gracyelle, Maria Flávia e todos os outros que comigo compartilham das mais loucas histórias.

Em especial gostaria de agradecer a duas pessoas que me deram forças durante um longo percurso e durante as mais diversas problemáticas que enfrentei. Pessoas que Deus me deu de presente e que guardarei com o maior amor e carinho. Agradeço em especial a Sthefanny Laís Gomes N. da Silva e a Mayra Ellen de Lima. Sem vocês eu creio que minha vida não teria o mesmo sabor.

A todos os professores da UFPB, funcionários de coordenação, funcionários de limpeza e apoio, a todos os que lutam pelo fazer educação meu eterno obrigado!

“— Um mago nunca está atrasado, nem está adiantado, ele chega precisamente na hora em que deve chegar.”

Gandalf O Cinzento – O Senhor dos Anéis

RESUMO

O presente trabalho de pesquisa bibliográfica teve como objetivo apresentar o *Stomachion* em sua historicidade combinatória. Para estabelecer os objetivos considerou-se os trabalhos dos mais diversos pesquisadores de história da matemática e dos estudos de combinatória, tendo como base principal os trabalhos de Reviel Netz e sua equipe fazendo alusões a outras obras de outros autores. Por muito tempo se teve uma noção de que a matemática grega não havia desenvolvido para o âmbito da matemática discreta com o estudo combinatório. Com pesquisas mais recentes tornou-se clara a existência de trabalhos na área, no caso o trabalho do matemático Arquimedes de Siracusa sobre o jogo *Stomachion*. Para afirmar a existência de tal ligação foi preciso estudar um tratado: *O Stomachion* no códex c, um palimpsesto de orações que possui diversos trabalhos de autoria de Arquimedes, traduzindo-o com a devida contextualização, e após entender o objetivo do tratado estabelecer requisitos mínimos para então com os cumprimentos de cada chegar a uma conclusão concisa, Arquimedes foi o primeiro matemático a trabalhar com a análise combinatória.

Palavras-chave: História da Matemática. Arquimedes de Siracusa. *Stomachion*. História da Análise Combinatória.

ABSTRACT

The present bibliographic research aimed to present the *Stomachion* in this combinatorial historicity. To establish the objectives, it was based on the studies of the most diverse researchers in the history of mathematics and studies of combinatorics, having as main basis the works of RevielNetz and his team making references to other works by other authors. For a long time there was a notion that Greek mathematics had not developed into the field of discrete mathematics with combinatorial study. With more recent research it became clear the existence of works in the area, in this case the work of the mathematician Arquimedes of Siracusa on the game *Stomachion*. To affirm the existence of such a link, it was necessary to study the *Stomachion* tract in codex c, a palimpsest of sentences that has several works by Archimedes, translating it with the proper context, and then after understanding the objective of the treaty to establish minimum requirements for so with the compliments of each reaching a concise conclusion, Archimedes was the first mathematician to work with combinatorial analysis..

Key words:History of Mathematics. Archimedes of Siracusa. *Stomachion*. History of Combinatorial Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Desenho de Arquimedes	19
Figura 2 – Arte retratando as Guerras Púnicas	21
Figura 3 – O jogo <i>Stomachion</i>	22
Figura 4 – Foto do livro de orações.....	24
Figura 5 – Foto de uma página do Codex C.....	25
Figura 6 – Guerreiros montados com o <i>Stomachion</i>	27
Figura 7 – Possíveis arranjos do <i>Stomachion</i>	29

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	8
1. INTRODUÇÃO	10
1.1. JUSTIFICATIVA	11
1.2. OBJETIVOS DE PESQUISA	11
1.3. METODOLOGIA DA PESQUISA	12
1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO	12
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	14
2.2. HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA.....	17
3. O <i>STOMACHION</i>.....	19
3.1. ARQUIMEDES	19
3.2. <i>STOMACHION</i> O QUEBRA-CABEÇA “ESTÔMAGO” GREGO	22
3.3. A COMBINATÓRIA GREGA DE UM QUEBRA-CABEÇA	23
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	30
REFERÊNCIAS	31

1. INTRODUÇÃO

Talvez um dos objetos matemáticos mais difíceis de estudar no ensino básico são os objetos combinatórios. Tudo se inicia com os princípios básicos de contagem, o princípio aditivo e o princípio multiplicativo os quais, em conjunto se configuram como a base para o estudo de contagem e para toda a Análise Combinatória, que por sua vez se revela de suma importância para futuros estudos de probabilidades, e principalmente de uso no cotidiano.

Muitas vezes a matemática, por completo, é tida como objeto longe e fora de uso na sociedade no pensar do aluno. Mudar este paradigma é dever do professor para se apresentar uma aprendizagem mais significativa, como segue das teorias de aprendizagem de Jean Piaget e a de David Ausubel. E isto é algo que a história da matemática pode ajudar. Principalmente no contexto da combinatória.

O aluno pode estar ciente das fórmulas de arranjos, de combinações e permutações. Mas os problemas cotidianos nem sempre são apenas de uso de fórmulas, é preciso criatividade e pensamento crítico. Conduzir o aluno a ter um pensamento mais criativo nas soluções é um dos objetivos da utilização da história da matemática voltada para o ensino. Um exemplo simples é o jogo *Stomachion*, do qual tratamos adiante. Para determinar a quantidade de possibilidades de arranjos que formam um quadrado não basta usar fórmulas, mas enxergar suas rotações, reflexões e substituições. E isto é fazer educação, e principalmente educação matemática.

A história matemática está para o professor não como um objeto de curiosidade, mas como uma ferramenta didática pedagógica para o processo ensino-aprendizagem. Ela é crucial para a compreensão da matemática como conhecimento construído através da cultura e sociedade.

Consideramos importante que o futuro professor entenda a evolução da matemática como parte de um processo sócio-cultural, entendendo como a matemática está ligada à cultura humana. Para que a matemática escolar seja compreendida como resultado da ação humana de entender e explicar o mundo e suas experiências nele, o ensino da matemática nas escolas teria que enfatizar a natureza contextual da disciplina. (D'AMBROSIO, 2007, pág. 400)

Dessa forma a história da matemática se faz de extrema importância para o professor em sua formação. Ainda mais com elementos que são tidos ou abordados apenas com formas de resoluções simples e fracas. A análise combinatória remonta desde tempos antigos. Em termos de apontar um personagem, apontamos para um que possui um pouco de lendas sobre sua história, mas que possui também uma importância enorme dentro da Matemática. Arquimedes de Siracusa, engenheiro, cientista e matemático possui uma chave para um, literalmente, quebra-cabeça antigo, o *Stomachion*.

O tratado do *Stomachion* era mais que um tratado perdido, era um tratado não estudado, e negligenciado, como veremos mais à frente. Mas acima de tudo, ele é um tratado que conta uma parte da história combinatória, da história matemática grega.

1.1.JUSTIFICATIVA

Apresentar um contexto mais histórico de uma determinada área de conhecimento matemático nos remete a uma pergunta tardia: quem foi que começou? É impossível afirmar que Arquimedes começou os estudos de Análise Combinatória. Existem mais documentos, como o Papiro de Rhind, que mostram que povos antigos já pensavam em problemas combinatórios. Mas, se precisamos de nomes, este é o que devemos dar: Arquimedes de Siracusa.

Mostrar que a matemática grega tem estudos de combinatória é importante, pois quebramos a ideia de que os gregos não investigavam objetos assim, e ao alunado do ensino básico, que a combinatória não são apenas fórmulas engessadas, mas contexto e principalmente criatividade e curiosidade.

1.2.OBJETIVOS DE PESQUISA

Este presente trabalho tem como objetivo:

- Objetivo Geral: Fazer uma apresentação e uma discussão a respeito do *Stomachion*.
- Objetivos específicos:
 - Pesquisar fontes históricas sobre a análise combinatória e sobre o *Stomachion*

- Discutir sobre um importante matemático da combinatória
- Apresentar uma perspectiva de um objeto combinatório e histórico

1.3. METODOLOGIA DA PESQUISA

Para alcançar os objetivos listados fizemos uso de uma pesquisa qualitativa, por não utilizar métodos estatísticos e quantitativos, mas ter o processo e seu significado como focos principais de abordagem (DA SILVA; MENEZES, 2005); e bibliográfica por utilizar de material já publicado, como livros, artigos, ensaios e/ou revistas (GIL, 2002).

A pesquisa bibliográfica possui uma vantagem que é essencial para este trabalho, que é justamente poder pesquisar uma grande gama de objetos dispersos no espaço e no tempo (GIL, 2002). Dessa forma, este mesmo autor afirma que este tipo de pesquisa é indispensável ao se tratar de estudos históricos.

Usamos duas fontes como maior apoio para o desenvolvimento da pesquisa. Um deles foi o livro *Códex Arquimedes*, da editora Record, escrito por Reviel Netz, autoridade reconhecida como estudioso de Arquimedes e professor de ciência antiga na Universidade de Stanford, e William Noel, curador de manuscritos e livros raros do Museu de Arte Walters e diretor do Projeto Palimpsesto de Arquimedes. Outro documento importante foi o artigo *Towards a reconstruction of Archimedes' Stomachion*, escrito por: Reviel Netz; Fábio Acerbi e Nigel Wilson.

Fez-se necessário o uso de outros documentos para entendimento da posição grega no contexto histórico da Análise Combinatória. O *The Roots of Combinatorics*, do professor Norman L. Biggs e o artigo *Combinatorics: A historical and pedagogical approach* do matemático inglês Robin J. Wilson foram de extremo apoio e suporte.

1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em capítulos dispostos da seguinte forma:

- Capítulo 1: Introdução.

Uma abordagem geral sobre o trabalho, dando ênfase aos pontos importantes de todo o trabalho, a justificativa, objetos pesquisados, objetivos e metodologia utilizada.

- Capítulo 2: Fundamentação Teórica

Este Capítulo está dividido em dois tópicos principais: a história da matemática no ensino, e a história da análise combinatória. Tendo os argumentos para sustentação deste trabalho como sua importância para o ensino aos futuros professores de ensino básico, e como ferramenta para criatividade de preparo de atividades pedagógicas.

- Capítulo 3: O *Stomachion*

Neste Capítulo temos todo o desenvolver da pesquisa apresentando o matemático Arquimedes, o jogo *Stomachion*, e a conexão de ambos com a análise combinatória principalmente em natureza histórica.

- Capítulo 4: Considerações Finais

Conclusões finais sobre o trabalho, como últimos comentários sobre a pesquisa decorrida no Capítulo 3, ressalvas e outros.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A história da matemática busca compreender os fatos do passado que afetaram, propiciaram, e fizeram evoluir os estudos desta ciência. Como toda e qualquer ciência, a matemática tem suas origens, seus grandes nomes, foi afetada por diversos eventos históricos. Um exemplo foi a guerra civil romana que acarretou a destruição da biblioteca de Alexandria. Estudar a história da matemática é entender o caminho pelo qual ela passou, e além do mais é ter uma ferramenta para o ensino (D'AMBROSIO, 2007).

A história traz forte conexão entre o mundo e a matemática, e isto é fundamental para a construção de conhecimentos (D'AMBRÓSIO, 2007). Algo que se deve caracterizar no estudo histórico é esta ligação. Muitas vezes o aluno não consegue enxergar esta relação matemática-sociedade, e não vê que a matemática é um produto da sociedade, para a sociedade. E não é raro alguns professores ainda terem esta visão de ensino, uma matemática rigorosa, abstrata e alienada.

Em contexto mundial não são recentes os estudos para a implementação da história da matemática nos cursos de formação para a docência. No Brasil, por outro lado, é algo mais recente. Atualmente existem discussões em congressos educacionais e matemáticos, mas a implantação da disciplina nos cursos de formação de professores em si é mais recente. Stamato (2003), citado por Balestri e Cyrino (2010), diz que apenas em 1998 a maioria das instituições de ensino começaram a ofertar a disciplina, e isto após o Primeiro Exame Nacional dos Cursos de Matemática.

Somente através de documentos oficiais (Resoluções CNE/CP nº01/2002 e 02/2002) foi que houve a concretização da oferta de estudo nos cursos de formação de todas as instituições. Entretanto, é certo afirmar que ainda encontram-se empecilhos. Um deles é a aceitação como ferramenta didática por alguns professores, outro é a sua abordagem curricular, seja ela integrada as disciplinas ofertadas pela formação ou como uma disciplina separada.

Um dos pontos que pode se contrapor é a questão do rigor. O estudante que inicia o curso de formação em Licenciatura em Matemática é apresentado a um rigor de maneira brusca e forte. A problemática é ele acreditar que a matemática possui apenas esta característica e levá-la ao ensino básico, apresentando uma matemática dura e rígida. Com base em conhecimento histórico é fácil perceber que nem sempre foi assim. Esta forma matemática é recente, vindo do movimento da

Matemática Moderna¹. Em suma, não é não ter rigor, mas se ter um cuidado e uma apresentação mais prática e contextual.

Não se trata, evidentemente, de substituir o rigor pela história ou de se contrapor a história ao rigor, mas de mostrar que o rigor é também uma categoria histórica que, como todas as outras, depende das condições e das possibilidades colocadas pelos diferentes contextos e épocas, e de mostrar também que é possível restituir às teorias o pano de fundo de seu desenvolvimento histórico e não, simplesmente, de apresentá-las dentro um quadro axiomático estático. (BRITO e MIGUEL, 1996, pág. 3).

Brito e Miguel (1996) citam os estudos de Aleksandrovet *al.*(1985) que a matemática, historicamente abordando, se divide em quatro etapas qualitativas: o prático-empírico (das origens ao séc. V a.C.); o de magnitudes constantes (séc. V a.C. ao séc. XVII); o de magnitudes variáveis (séc. XVII ao séc. XIX); e o da abstrata e moderna (séc. XIX aos tempos atuais). O rigor matemático evoluiu em especial nesta última etapa.

Fora este tempo a matemática não era infrutífera, ela possuía grande valor. Com uma visão histórica o futuro professor pode perceber a relação existente, e saber que há caminhos antigos que podem ser traçados como um diálogo entre objeto matemático e aluno que não seja tão duro e rígido, mas moldável e social.

Ou seja, pelo estudo da matemática do passado, podemos perceber como a matemática de hoje insere-se na produção cultural humana e alcançar uma compreensão mais significativa de seu papel, de seus conceitos e de suas teorias, uma vez que a matemática do passado e a atual engendram-se e fundamentam-se mutuamente. (BRITO e MIGUEL, 1996, pág. 8-9)

Algo que poderiam refletir esta visão mais aberta seriam as soluções apresentadas por alunos. É certo que os critérios para se admitir uma prova e/ou solução matemática são inúmeros, mas ter um olhar diferenciado para as respostas dos alunos do nível básico é admitir e aceitar sua criatividade, isto é, estar aberto à soluções novas que possam estar corretas e com as quais nós professores não estamos familiarizados.

O professor com prática de refletir sobre o pensamento dos matemáticos da história e analisar como seu modo de pensar se encontra modificado na era atual, tem melhores oportunidades para apoiar os seus alunos no seu processo individual de construção de conhecimento matemático. Esses professores conseguem se liberar do seu método de resolver um problema e aceitar a solução alternativa proposta por outros, incluindo soluções propostas por seus alunos. Seu repertório de soluções é muito mais rico e repleto de conexões e relações entre ideias. (D'AMBROSIO, 2007, pág. 403)

¹ O movimento da Matemática Moderna foi um movimento de ensino de matemática que “buscava aproximar a Matemática ensinada na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área. Como consequência, as propostas defendidas pelo Movimento enfatizam as estruturas algébricas, a teoria dos conjuntos, a topologia, as transformações geométricas, entre outras.” (DA SILVA, 2006, pág. 51)

Com a evolução da matemática questões antigas e sofisticadas receberam soluções triviais (quanto mais avançado na matemática, mais ferramentas tornam fáceis algumas resoluções), em contraparte à suas antigas resoluções. Estudar as soluções dadas à época dos problemas faz parte da introdução de ferramentas novas ao ensino. Isto é, o uso das ferramentas e instrumentos pelos antigos estudiosos permite uma perspectiva diferente da forma como o problema foi originalmente abordado.

Um exemplo claro são os problemas geométricos. Para um professor, resolver questões básicas é algo fácil, mas, resolvê-las tendo apenas as ferramentas utilizadas pelos pioneiros é mais complexo, estimulando a criatividade. Isto é importante, pois dá abertura a uma gama de possíveis soluções para aquele problema, inclusive algumas possibilidades de respostas de alunos do ensino mais básico (D'Ambrosio. 2007).

Outra observação seria a relação entre álgebra e as operações numéricas com a geometria. Não são raros alunos que possuem dificuldades na geometria, mas possuem uma boa habilidade com as manipulações algébricas, mas historicamente falando, ambas possuem uma relação forte. Como citado no texto, para D'Ambrosio (2007) basta tomarmos problemas numéricos do Papiro de Rhind, no qual as soluções usadas são basicamente tentativas de construção de quadrados (completar quadrados); ou, ainda, observe a proposição quatro no Livro II em *Os Elementos* e perceba a geometria no desenvolvimento de um quadrado da soma.

No tocante à questão da história da matemática ainda existem outras problemáticas como o relativo ao professor que irá formar os docentes. Como afirmam Balestri e Cyrino,

[M]uitos matemáticos não consideram a história da matemática como um componente da Matemática, assim como a Análise ou a Álgebra. Aqueles que possuem conhecimentos acerca da história da matemática, em sua maioria estudaram ou estudam história por iniciativa própria. (BALESTRI e CYRINO, pág.114, 2010).

É importante entender que temos mais ferramentas pedagógicas e a história pode ser uma forma nova de se visualizar e de propagar a o surgimento e desenvolvimento das ideias matemáticas no decorrer do tempo e proporcionamos um diálogo maior com a sociedade e a cultura. Principalmente, mostrando que ela também teve sua história, feita pelo homem. Isto ajuda a quebrar o paradigma de que a matemática é um “objeto isolado do mundo”, que não se faz necessário estudar. Mas, ao contrário, o ensino de matemática com uma abordagem histórica nos permite mostrar a humanidade na matemática, uma ciência que se constrói com o tempo.

2.2. HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

A matemática é tida como objeto isolado do mundo por muitos alunos, então não seria diferente com um dos seus ramos, a análise combinatória. Apresentada em diversos livros como sendo apenas fórmulas de combinações, arranjos, permutações, traz ao aluno um olhar distorcido do objeto matemático e da própria matemática. A história de sua origem, e os fatos que fizeram avançar seus estudos seria de grande ajuda. Mas se ainda há matemáticos que não admitem a história da matemática como ferramenta de ensino, a história da combinatória não seria excluída de certo preconceito.

A combinatória foi bastante negligenciada pelos historiadores da matemática. No entanto, existem boas razões para estudar as origens do assunto, uma vez que é um tipo de subcultura matemática, não exatamente paralela em seu desenvolvimento às grandes disciplinas de aritmética, álgebra e geometria. (BIGGS, pág. 109, 1979).

Estudar a combinatória irá levar a diversas etapas do tempo e a diversas culturas. Desde épocas antigas e remotas como o problema 79 do papiro de Rhind (RODET, 1881, apud BIGGS, 1979), que remonta a uma história do ano 1650 a.C. até os dias mais recentes com as grandes teorias, como a Teoria de Grafos. De certo modo, como afirmado anteriormente, saber destes dados históricos fortalece os materiais pedagógicos que o futuro professor poderá utilizar em sala. É preciso lembrar que os estudos combinatórios estão precisamente regulados desde os antigos PCN (BRASIL, 1998, p. 44) até mesmo na nova base estrutural de ensino, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

A análise combinatória é o ramo da matemática discreta que estuda as mais diversas problemáticas de contagem. Para Pitombeira (1986, p. 21) é “a arte de contar”, Leibniz (1666, p. 4) acreditava que fosse “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos”, já Nicholson (1818, apud VAZQUEZ; NOGUT; 2004, p.4) diz que é “o ramo da Matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si”.

A contagem como objeto é difícil de traçar a origem, pois, se observarmos como objeto histórico ela não tinha status formal (BIGGS, 1979). Mas temos exemplos de seu uso em documentos antigos, e o mais antigo que podemos supor é o Problema 79 do Papiro de Rhind. Nele o escriba desenhou símbolos que poderiam ser traduzidos criando uma ligação entre um objeto e um número: casa 7, gato 49, rato 343, trigo 2401, hekat 16807; e ao final o número 19607.

A interpretação correta do problema não se sabe ao certo, mas uma interpretação foi supostamente dada por Leon Rodet (1881, apud BIGGS, 1979). Como é fácil de notar, os números crescem de forma exponencial de base sete. Com isto foi sugerida a interpretação: “Existem sete casas, cada uma com sete gatos; cada gato mata sete ratos; cada camundongo teria comido sete cabeças de

trigo, cada uma das quais teria produzido sete medidas hekat de grãos.” (BIGGS, 1979, p.111). Existem problemas similares de contagem no LiberAbacci de Fibonacci, e em outros lugares mais inusitados como em livros infantis (BIGGS, 1979, p.110).

Com os outros objetos da análise combinatória, como as combinações, arranjos e permutações, existem mais caminhos traçados. Podemos fazer linhas de culturas como os povos árabes e o triângulo aritmético; os povos chineses com os quadrados mágicos, e os povos hindus com diversos problemas em tratados como o Lilavati, Sushruta e outros (WILSON, 2000; BIGGS, 1979).

É interessante notar que participam da história da combinatória algumas questões, jogos e problemas pouco usuais, como o exemplo do problema do lobo, do carneiro e do repolho (BIGGS, 1979), que Alcuíno de Iorque propôs no manuscrito *Propositiones ad Acuendos Juvenes*. Por se tratar de encontrar uma possibilidade de rota entre uma quantidade finita é dito problema de matemática discreta. Outro exemplo fora do cotidiano escolar é o problema de Josephus, similar às cantigas silábicas infantis, na hora da escolha de certa pessoa para uma determinada ação. No pique esconde, por exemplo, quando se escolhe quem irá contar, as crianças cantam uma música sem um sentido lógico, mas que com o passar de cada sílaba ela aponta para um participante e, no final da rima, o último apontado está fora da possível escolha de ser o que irá contar, uma espécie de contagem regressiva.

Voltando à bagagem histórica dos povos, se faz necessário avaliar o que os matemáticos gregos ofereceram como contribuição. É certo afirmar que a matemática deve muito aos estudos gregos, principalmente se olharmos para a geometria, lembramos logo do livro *Os Elementos*. Mas e para a combinatória? Houve algum material histórico grego com ao menos indícios de um estudo destes objetos? Biggs (1979) nega existir fortes indícios. Dos objetos que ele aponta ter uma possível ligação seria uma observação de Crisipo citada por Plutarco. Mas, por não ter referências aos cálculos, ele “[...] aponta para a conclusão de que os gregos não se interessavam por esses assuntos.” (BIGGS, 1979, p.113).

É uma afirmação um tanto forte feita por Biggs, mas em suas investigações era o que realmente se concluía. Os matemáticos gregos se aventuraram por diversos objetos matemáticos, geometria e álgebra, como cálculos numéricos. Mas algo não se encaixava. Estudos mais recentes apontam que os gregos possuíam materiais desta natureza-

Pesquisadores como Reviel Netz, Fábio Acerbi e outros têm ajudado com seus trabalhos na reescrita da história da matemática. A descoberta de documentos antigos ajuda a esclarecer fatos e a entendermos melhor como ocorreram certos avanços, ou não, na matemática. Um destes documentos foi o tratado de Arquimedes, que levou o nome de um jogo o *Stomachion*. Este tratado mudou um pouco da perspectiva histórica grega em relação à Análise Combinatória. E é exatamente dele que iremos tratar mais à frente.

3. O *STOMACHION*

A história do *Stomachion*, ou o jogo de Arquimedes, é cheia de reviravoltas e personagens importantes, a exemplo do próprio Arquimedes. Este trabalho tem como base principal o artigo e o livro dos pesquisadores Reviel Netz, William Noel, Nigel Wilson entre outros, sendo Netz uma autoridade renomada sobre Arquimedes e também o editor do Palimpsesto de Arquimedes.

Antes de tudo, precisamos conhecer a genialidade por trás dos estudos do *Stomachion*. Voltemos um pouco no tempo, por volta do século II antes de Cristo.

3.1. ARQUIMEDES

Na costa da Sicília, atualmente Itália, existe uma cidade denominada Siracusa. Lá foi onde nasceu e viveu uma das maiores personalidades científicas do mundo antigo. Arquimedes de Siracusa viveu em torno de 287 a.C. e 212 a.C. (o que os cálculos com base nos documentos nos dizem). Filho do astrônomo Fídias, que conseguiu obter uma aproximação para a razão dos diâmetros do Sol e da Lua.

Arquimedes (figura 1) é considerado um dos cientistas do tempo antigo, comparável a mentes como a de Isaac Newton. É um matemático com grandes descobertas, como o cálculo da área de um segmento de parábola através do uso de triângulos e o infinito potencial, no qual ele constrói triângulos de modo exaustivo (bem próximo ao nosso cálculo), e a razão entre os volumes da esfera e do cilindro. Seu fascínio era tão grande por esta última, que a desejou inscrita no seu túmulo (ASSIS,2008).

Figura 1 – Desenho de Arquimedes



Fonte: <https://sites.google.com/site/greciaantigamatematicos/home/arquimedes>

A cidade de Alexandria, que na época era o centro da ciência grega, fez parte de sua vida. Assis (2008, p.13) acredita na possibilidade de que ele tenha estudado ali com os sucessores do pai da geometria, Euclides (~300 a.C.). Um dos destinatários de suas cartas era Eratóstenes (276 a.C – 194 a.C), que no tempo era bibliotecário de Alexandria.

Arquimedes é tido como grande cientista não apenas por suas descobertas, mas por causa da genialidade por trás delas. Ele era reconhecido no seu tempo não como matemático, mas por seu saber na área de engenharia. Sua concentração e foco em um determinado problema era algo lendário. É atribuído a Plutarco (46 d.C – 120 d.C.) uma passagem que relata um pouco sobre sua perseverança:

Muitas vezes os servos de Arquimedes o levavam contra sua vontade para os banhos, para lavá-lo e untá-lo. Contudo, estando lá, ele ficava sempre desenhando figuras geométricas, mesmo nas cinzas da chaminé. E enquanto estavam untando-o com óleos e perfumes, ele desenhava figuras sobre seu corpo nu, de tanto que se afastava das preocupações consigo próprio, e entrava em êxtase ou em transe, com o prazer que sentia no estudo da geometria. (ASSIS, 2008, p. 14)

Pode-se dizer que sua insistência em diversos problemas nos rende grande admiração. Criou e construiu diversos objetos. Inventou um sistema de bombeamento de água para irrigação chamado de cóclea. Construiu um planetário que, com um único sistema hidráulico, exibia a movimentação dos astros. Sua fama cresceu e com o tempo teve os olhos do rei Hierão voltados para ele, devido a uma carta que lhe escreveu. Logo mais é dito que provou seu valor através de uma prova proposta pelo rei. Plutarco discorre um pouco sobre o feito.

Arquimedes escreveu ao rei Hierão, de quem era amigo próximo, informando que dada uma força, qualquer peso podia ser movido. E até mesmo se gabou, somos informados, de que se houvesse uma outra Terra, indo para ela ele poderia mover a nossa Terra. Hierão ficou admirado e lhe solicitou que demonstrasse isto com uma experiência real, mostrando um grande peso sendo movido por uma pequena máquina. De acordo com este desejo Arquimedes tomou um dos navios de carga da frota do rei, o qual não podia ser retirado das docas exceto com grande esforço e empregando muitos homens. Além disso, carregou o navio com muitos passageiros e com carga total. Sentando-se distante do navio, sem fazer esforço, mas apenas segurando uma polia em suas mãos e movendo as cordas lentamente, moveu o navio em linha reta, de maneira tão suave e uniforme como se o navio estivesse no mar. (ASSIS, 2008, p.17)

O rei, admirado com a sabedoria de Arquimedes, solicitou que ele construísse diversas armas para os mais diversos fins, e ele o atendeu. É plausível a possibilidade de alguns relatos sobre os feitos de Arquimedes serem apenas lendas, ou exageros, mas uma coisa é fato: ele estava à frente da defesa do reino de Herão no ataque do império romana sendo responsável pelas armas de Siracusa.

Não é relatado nenhum uso destas armas senão contra os romanos em um ataque feito durante a segunda Guerra Púnica² (Figura 2). Siracusa era a principal cidade da Sicília, e estava sob a influência romana de forma indireta. Não era raro o desejo comum de se livrar do controle romano. Embora os atacantes soubessem da posse de catapultas dos siracusanos, eles foram surpreendidos pela mente de Arquimedes.

[...] Arquimedes, que havia preparado máquinas construídas para lançar a qualquer alcance, assim causou danos aos assaltantes a longa distância, à medida que suas embarcações se aproximavam [a primeira tentativa foi por mar], com suas catapultas mais potentes, para deixa-los em muita dificuldade e aflição; e tão logo essas máquinas atirassem longe demais e o alvo se tornasse mais próximo, ele continuava usando máquinas de alcance cada vez menor, abalando assim completamente a coragem deles até pôr um ponto final em seu avanço...[Os romanos desistiram do ataque, e assim resume Políbio:] Que coisa grande e maravilhosa mostrou ser a genialidade de um homem... Os romanos, fortes como eram tanto por mar como por terra, tinham toda esperança de capturar a cidade de imediato, tivesse um velho Homem de Siracusa sido removido; mas uma vez que estava presente, não se aventuraram nem sequer a tentar atacar... (NETZ e NOEL, 2009, p.68)

Mesmo com toda força e inteligência de Arquimedes existia algo bem mais delicado de se deduzir, uma traição. O triunfo do império romano sobre Siracusa veio por meio de um desertor que relatou aos inimigos romanos sobre a ausência de soldados sentinelas, devido estarem bêbados (NETZ e NOEL, 2009). Sendo o fim para o cerco e a vitória para os romanos.

Figura 2 – Arte retratando as Guerras Púnicas



Fonte: <https://www.historiazine.com/2016/11/as-guerras->

Marcelo, o general responsável pelo ataque a Siracusa, deixou claro o quanto queria que trouxessem Arquimedes vivo para ele, por seu tamanho feito na defesa

² As Guerras Púnicas foram conflitos entre Cartago e Roma entre 264 a.C a 146 a.C.. Ocorreram três grandes conflitos durante este período, todos pela hegemonia política e econômica, o domínio do mar Mediterrâneo.

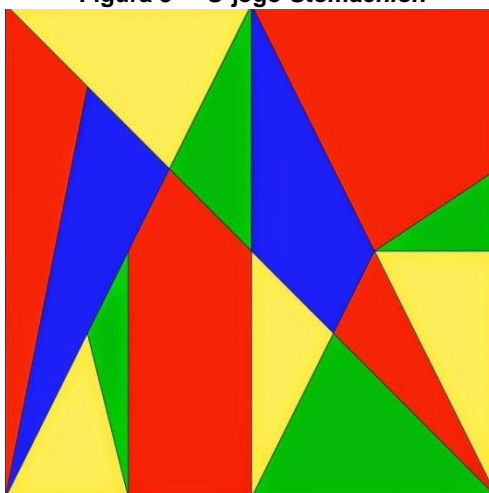
da cidade. No entanto, é certo que o gênio Arquimedes fora morto por um soldado, durante o ataque a cidade. Existem três relatos descritos e ouvidos por Plutarco na biografia de Marcelo, mas em todas é certo que o fim chegara à vida do matemático. Marcelo, acometido por complacência, atendeu ao pedido de Arquimedes e mandou fazer seu túmulo com as inscrições de uma esfera inscrita em um cilindro.

Seu túmulo foi visto outra vez por Cícero (106 - 43 a.C.), um orador romano e com um grande respeito pela herança científica deixada pelos gregos. Existem relatos seus de que em 75 a.C. encontrara o túmulo com as inscrições solicitadas por Arquimedes, mas que agora estão perdidas. Mesmo assim, o matemático que quase derrotara um exército de Roma, ainda vivia, de forma escondida, nas suas obras. E que agora aos poucos desvendamos.

3.2. *STOMACHION* O QUEBRA-CABEÇA “ESTÔMAGO” GREGO

O *Stomachion* é um quebra-cabeça formado de catorze peças, sendo onze triângulos, dois quadriláteros e um pentágono com nenhuma peça regular (lados de mesmo tamanho) (Figura 3), usado para resolver o desafio de montar um quadrado. Bem similar ao Tangram, um quebra-cabeça chinês, este possui um nome peculiar. É denominado *Stomachion*, talvez entendido como “dor de barriga” ou similar (NETZ,2009). É certo que o jogo não foi criado por Arquimedes, mas apenas estudado por ele, pois existem outras referências anteriores a esse quebra-cabeça.

Figura 3 – O jogo *Stomachion*



Fonte: <http://somainfinita.blogspot.com/2015/01/stomachion.html>

O jogo em si era de uso desde crianças mediterrâneas até os mais velhos (NETZ et al.,2004). O quebra-cabeça poderia ser jogado de duas maneiras. Uma delas consistia em um jogo de criatividade no qual se deveria produzir formas quaisquer, desde animais a guerreiros, ou objetos da época. A segunda forma usada era como um jogo de paciência, no qual o jogador deveria montar quadrados usando combinações de peças diferentes. Como o jogo tem uma visão infantil, através dos testemunhos antigos, Netz brinca em seu artigo ao supor “Talvez o tratado de Arquimedes seja obra de um jovem pai.” (NETZ et al., 2004, p. 4).

3.3.A COMBINATÓRIA GREGA DE UM QUEBRA-CABEÇA

A história da análise combinatória perpassa por diversas culturas e épocas distantes. Nos mais antigos temos um problema tido como de contagem, como supõe Leon Rodet (1881) apresentado no papiro de Rhind, o problema 79, com mais de dois mil anos. Mas de todas as culturas, se fez necessário observar a cultura grega, como Biggs diz em seu *The Roots Of Combinatorics* (1979) “Em qualquer discussão sobre a antiguidade dos cálculos combinatórios, a contribuição dos antigos gregos deve ser avaliada. A avaliação é notavelmente negativa. Existem muito poucas observações relevantes em toda a literatura grega existente...”.

Naquela época tínhamos em mãos pouquíssimas obras que dispusessem de ideias ou até mesmo suposições sobre um estudo combinatório grego. No mais tínhamos uma citação de um problema dado por Crisipo³ nas questões conviviais dadas por Plutarco. E mesmo assim, os estudos delas não exibiam resquício algum de avanço ou objeto de importância, naquela época. Sendo assim, Biggs afirmou:

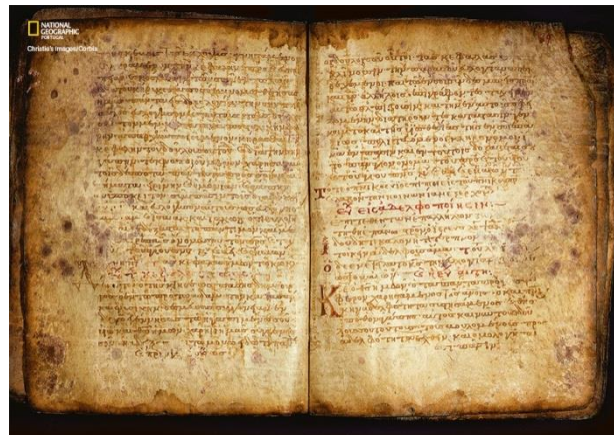
A falta de qualquer outra referência significativa a esses cálculos aponta para a conclusão de que os gregos não se interessavam por esses assuntos. Foi sugerido que sua notação complicada os conteve, mas esse argumento ignora suas contribuições consideráveis à teoria dos números, uma área em que os cálculos numéricos são igualmente importantes. A verdadeira razão pode estar profundamente na natureza da filosofia e cultura gregas ou pode ser simplesmente um acidente histórico. (BIGGS, 1979, p. 114)

O palimpsesto de Arquimedes e seu tratado sobre o *Stomachion* estão para confrontar esta ideia, em conjunto com outras obras mais recentes. Os gregos possuíam um estudo combinatório, talvez não com este nome, nem tão organizado como o de hoje, mas eles têm o primeiro matemático a estudar um objeto desta natureza. O tratado sobre o *Stomachion* foi deixado de lado nos estudos por diversos anos, tendo como causa ser um tratado de “ordem pequena”(Netz diz que seria como um primo pobre das obras de Arquimedes) e também por ter seus manuscritos em extrema deterioração, como Netz afirma:

Quando a venda do Palimpsesto foi realizada, todos repetiam com entusiasmo que poderíamos encontrar novas leituras de *O Método*. Mas literalmente não se falava que poderíamos encontrar novas leituras do *Stomachion*. Esse tratado era o parente pobre, aquele de que todos se esqueciam – em parte porque havia sobrado pouco com que se pudesse trabalhar; mas mais importante, porque imaginava-se que, afinal de contas, não passava de um jogo. (NETZ e NOEL, 2009, p. 246)

³Crisipo de Solis (281 a.C. — 208 a.C.) foi um filósofo grego do estoicismo, doutrina fundada por Zenão de Cício (335 a.C — 264 a.C.), e discípulo de Cleanto de Assos. É reconhecido por sua sutileza e dialética, e sua morte por hilaridade.

Figura 4 – Foto do livro de orações – Nele contem os manuscritos de Arquimedes (Codex C)



Fonte: <https://nationalgeographic.sapo.pt/ciencia/actualidade/1089-como-um-manuscrito-medieval-escondeu-um-texto-de-arquimedes>

Existem pouquíssimos documentos antigos que tratam sobre o *Stomachion*. Um está na citação de um livro matemático árabe que explicita ser um tratado de Arquimedes, e uma outra parte está no Palimpsesto. Muito da matemática grega sobreviveu nas cópias árabes e como eles eram ótimos matemáticos, acrescentavam algumas coisas, reformulavam ou reduziam, e aconteceu o mesmo com o *Stomachion* (NETZ, 2009).

A parte árabe oferecia um quadrado dividido em catorze partes, indicando uma fração de cada umas das partes em relação ao quadrado todo. Também trazia o famoso diagrama do *Stomachion*, todos os que o conhecem, reconhecem a imagem. As frações da unidade que ele relatava eram as seguintes:

$$\frac{1}{16}, \frac{1}{48}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{1}{24}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$$

Além disso, o texto era explícito quanto ao objetivo geral, que era mostrar que todas as partes permanecem em uma razão racional em relação ao quadrado. Netz afirma que este seria o real problema, pois, para ele, isto não seria o objetivo original do tratado. Ele afirma que esta cópia árabe tinha uma expressão fraca, são basicamente frações unitárias, exceto a última, que seria o caso da peça pentagonal. Esta era redundante, pois as peças são resultados de bissecções ou trissecções sucessivas de linhas criando metades ou terços do original, e de extrema facilidade, pois não havia argumentações geométricas no tratado. Sendo assim, ele concluía que isto não seria do feito de Arquimedes.

Em resumo, é implausível que o objetivo da proposição - se é que deve-se aplicar a ele os padrões de realização com os quais normalmente se associa Arquimedes - era apenas para mostrar a razão racional das partes para o quadrado. (NETZ et al, 2004, p. 71-72)

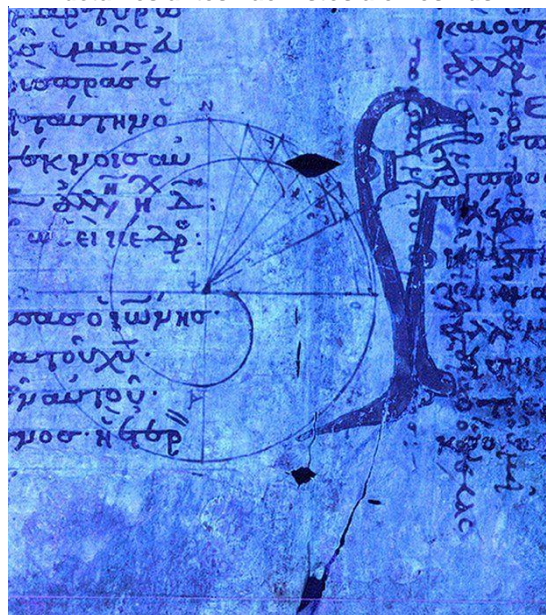
Outra parte que estava no Palimpsesto seria agora de extrema importância. Ela não era uma cópia de outra cópia, mas um texto do próprio Arquimedes. Existiam

outras dificuldades para se enfrentar, dificuldades estas de teor mais complexo, o mal do tempo era um deles. Um Palimpsesto é um tipo de pergaminho que é raspado para a retirada da tinta dos escritos e fazer-se um pergaminho seminovo para ser reutilizado. Dessa forma, algumas partes degradadas, principalmente as últimas, pelos fungos e tempo, foram descartadas, e com elas uma boa parte do tratado do *Stomachion*. “Isto é regra em documentos antigos, o pior está sempre em pior estado” (NETZ, NOEL, 2009, p. 243).

De toda forma havia trechos não vistos sobre o tratado. Do original, tinham-se apenas dois fólios contendo material sobre o jogo. Ao olhar as imagens das páginas do Palimpsesto que correspondiam à busca, uma decepção: elas estavam extremamente desgastadas. Nada do original grego poderia ser visto. Seria uma estagnada na busca do entendimento da obra se não fossem as manipulações com as outras páginas. Da mesma forma que foi com as outras páginas que continham as outras obras, elas tinham as imagens para a mesma operação.

Foi um projeto de extremo cuidado para conseguir enxergar Arquimedes naquele material. Eles montaram uma grande equipe de conservadores, técnicos de imagem, sem contar o material gasto com máquinas com as mais diversas lentes, e potentes computadores para fazer o “invisível voltar a ser visível” (figura 5). Entretanto, as últimas páginas estavam extremamente desgastadas e passar pelo processo poderia ser o fim delas. Uma das páginas não tinha nem mais o formato de página e possuía buracos, estava se desintegrando, e elas eram as mais importantes.

Figura 5 – Foto de uma página do Codex C sobre efeito de luz ultra violeta revelando detalhes antes não vistos a olhos nus.



Fonte: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-42494730>

O fator chave para continuar da pesquisa foram fotos que Johan Ludvig Heiberg⁴, um filólogo, fez do livro de orações anos atrás. Ele também tentara decifrar o que os manuscritos escondiam, além de ser o grande descobridor da obra que estava escondida e perdida, e muito do que se fez foi utilizado na pesquisa de Netz. As fotos estavam muito melhores que as páginas estavam naquele momento. E com certos testes, funcionaria o mesmo processo usado nas páginas. Logo, a busca continuava.

Netz, no livro *Codex Arquimedes*, escrito em co autoria com William Noel, relata o quanto foi trabalhoso e recompensado pela pesquisa no Palimpsesto. Ele também diz como foi conceber a pesquisa e suposição de que Arquimedes escrevera um tratado combinatório. Como nas outras obras, Arquimedes sempre fazia uma introdução para seguir no seu método e demonstrar suas proposições e objetos de investigações. Heirberg já tentara traduzir esta parte, mesmo assim ainda era uma parte obscura e difícil de compreender. O que se possuía era o trecho seguinte:

Como o assim chamado *Stomachion* tem uma variada teoria de transposição das figuras com as quais é formado, achei necessário: primeiro, especificar, em minha investigação a respeito da magnitude da figura inteira, cada uma das figuras em que é dividido por qual [número] é medido; e posteriormente também quais são os ângulos, considerados pelas combinações e somados juntos; tudo isso dito com o propósito de descobrir a montagem das figuras que surgiriam, quer os lados resultantes das figuras estivessem em uma linha quer estivessem ligeiramente fora dela, mas de tal forma a passar despercebido aos olhos. Pois considerações como essas são intelectualmente desafiadoras; e, se estiver um pouco fora de linha, sendo ao mesmo tempo despercebido pela visão as figuras que são compostas não devem por essa razão ser rejeitadas. (NETZ et al, 2009, p. 247-248)

Aqui já temos um pouco mais de visão sobre o tratado, mas ainda é algo um pouco nebuloso. Sabe-se que Arquimedes iria calcular as medidas de cada peça que compõe o quebra-cabeça, e tentar encontrar encaixes com os vértices e ângulos para formar novos resultados, talvez formando linhas retas, resultando em 180° (NETZ, 2009). Agora, com as “figuras que surgiriam”, temos um pouco de impasse. Netz afirma que Heirberg teve, de fato, influencia dos gramáticos romanos em sua interpretação. E isso deveria ser o problema pelo qual o restante do texto do Palimpsesto ficara mais complexo de se ler e entender.

O historiador Eduard Jan Dijksterhuis⁵ também passou por complicações para entender este tratado. Em seus comentários sobre a obra houve mais material sobre a evidência do achado do que realmente sobre o objeto ao qual o tratado se referia (NETZ, 2004). Mas o que Heirberg passara talvez fosse diferente.

⁴ Johan Ludvig Heiberg (1854 - 1928) foi historiador e filólogo dinamarquês. Ele foi o responsável pela descoberta do Palimpsesto de Arquimedes antes do desaparecimento do documento. Também foi ele que fotografou as diversas páginas que fora de grande ajuda para a pesquisa de Netz e Noel.

⁵ Eduard Jan Dijksterhuis (1892 - 1965) foi um historiador da ciência. Ele era conhecido por ser um grande historiador de Arquimedes. Produziu um livro sobre ele e suas obras comentando cada.

Ocorre que esse grupo de autores se afeiçoou a um certo clichê: comparar as muitas expressões que podem ser formadas com apenas umas poucas palavras às muitas maneiras pelas quais podem ser feitas diferentes figuras com apenas umas poucas formas básicas. (NETZ et al, 2009, p. 248)

Dessa forma, o tratado informava que com as peças do *Stomachion* poderíamos construir diversas formas, infinitos elefantes, infinitos guerreiros, infinitos pássaros, em resumo, estava presente um pouco do infinito matemático. O problema é que Arquimedes estava apenas se referindo às infinitas formas que se poderia montar um guerreiro (fig. 6). Isto seria apenas um brinquedo do infinito, pois se uma peça pode ser conectada à metade, ou a um terço, ou um quarto, a qualquer razão de um devido lado, então se tem infinitas formas de se montar um guerreiro.

Figura 6 – Guerreiros montados com o *Stomachion*



Fonte: <http://www.webquestcreator2.com/majwq/ver/cazaver/2378>

Mas a busca do real entendimento sobre o Tratado do *Stomachion* não acabou neste ponto. Netz narra no seu livro *Codex Arquimedes* como foi ter ideias confrontadas apenas ao manipular um *Stomachion* que recebera. No livro, ele narra que após tentar entender um pouco sobre o tratado ele tenta manipular uma cópia feita de vidro que recebera antes, o que o fez pesquisar sobre o tratado. Ela estava no formato de um quadrado, mas em um arranjo diferente e isto o fez supor que Arquimedes não falava de elefantes ou guerreiros, mas talvez de quadrados.

Com este deslumbre poderia então ser um tratado de natureza combinatória. Se estivesse correto, Arquimedes seria o primeiro matemático a andar pelas terras da análise combinatória. Para isso ele precisaria afirmar duas coisas sobre o tratado do *Stomachion*: que o número de soluções era alto o suficiente para ser empolgante e desafiador ao investigador, e que fosse possível calcular esse número naquela época.

Netz teve a felicidade de encontrar um material recente que afirmava que os gregos possuíam uma base de cálculos combinatórios, um artigo escrito por Fábio Acerbi acerca da observação de Crisipo em um trabalho de Plutarco. Fora através de Fábio Acerbi que ele enredou na produção da pesquisa e escrita de um artigo

sobre o *Stomachion* e sua ligação com a combinatória. Explanemos um pouco dessa afirmação.

Fábio Acerbi escreveu no seu artigo *On the Shoulders of Hipparchus* uma teoria de como Hiparco resolvera o problema de Crisipo que aparece nas *Questões Conviviais* de Plutarco, mostrando que os números apresentados eram não só corretos, mas também como um matemático antigo poderia realizar os cálculos somente com o disponível da época. Ele conseguiu conciliar os dados da questão usando os números de Schröder⁶. Era incrível, a combinatória grega existia e tinha um grande avanço. Netz afirmou que este poderia ser encaixado como uma obra após Arquimedes, pois Hiparco era mais novo. Logo, tudo se encaixava, Hiparco deveria ter bebido de uma fonte anterior para prosseguir com seus estudos e cálculos.

Quando o segundo e último parágrafo do *Stomachion* foram traduzidos deram um suporte melhor, um argumento maior à sua suposição. Segue a tradução feita por Netz e que teve a confirmação de Nigel Wilson:

[...] não há um pequeno número de figuras compostas a partir delas, devido a ser possível rotacioná-las em um outro lugar de uma figura igual e equiangular, transposta para assumir uma outra posição; e novamente também com duas figuras, tomadas juntas sendo iguais e semelhantes a duas figuras tomadas juntas – então, como resultado da transposição, muitas figuras são criadas. (NETZ et al, 2009, p. 263)

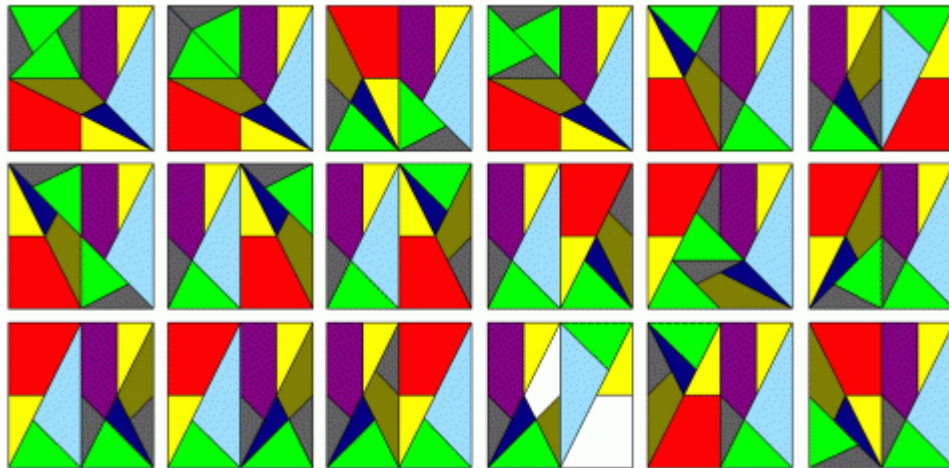
Como a congruência foi bastante citada, Netz logo tinha material para assumir que Arquimedes estava se referindo aos quadrados possíveis de montar. Bastava agora conseguir o número exato, estudando o quebra-cabeça. Teria que levar em conta também as novas informações dadas pela tradução, as rotações e as “transposições” ou substituições. Para isto, seus amigos matemáticos começaram a enveredar na busca da solução.

Seu colega de correspondência que lhe presenteara com o *Stomachion* em vidro também entrou na busca e ofereceu um prêmio simbólico de cem dólares para os cientistas computacionais que conseguissem identificar a quantidade de quadrados possíveis de montar com o quebra-cabeça (Figura 7), este se tornou o Prêmio *Stomachion* Marasco.

Um cientista da computação, Bill Cutler, conseguiu montar um programa para resolver que funcionou perfeitamente. Ele antes traduziu o *Stomachion* em uma linguagem computacional e depois fez a máquina manipular, e imprimir as soluções. Ganhou o prêmio *Stomachion* Marasco e ajudou a resolver o tratado. A resposta obtida era 17.152.

⁶ Os números de Schröder são uma sequência de números inteiros que delimita a quantidade de possibilidades de como uma quantidade de objetos pode ser selecionada, tendo como mínimo a escolha de dois objetos. Basta ter como exemplo as letras *abcd*. Podemos selecioná-las de 11 formas. De seis formas pegando duplas de letras, *(ab)cd*; de quatro formas selecionando trios, *(abc)d*; e uma forma selecionando tudo.

Figura 7 – Possíveis arranjos do *Stomachion*



Fonte: <https://www.craftsmanspace.com/free-projects/stomachion-of-archimedes-puzzle-plan.html>

Mas o que realmente importava era a resposta que os matemáticos tentavam obter. Eles usavam meios que Arquimedes tinha à época, papel e lápis. Não tardou para conseguirem o mesmo resultado. Eles organizaram em famílias de soluções, sem utilizar nenhum meio atual e novo, apenas ferramentas matemáticas antigas. Traçaram linhas de soluções que se anulavam, e continuaram a fazer os arranjos com substituições até encontrarem 536 soluções básicas. Depois, com o uso de rotações simples, que não usavam substituições e sempre recorrendo a rotações que poderiam se anular, os matemáticos chegaram ao resultado de 17.152.

Os resultados batiam, por um lado, feitos com um computador e um programa funcional e, por outro lado, por recursos matemáticos. O tratado do *Stomachion* tinha como objetivo estudar todas as possíveis formas de obtenção de um quadrado usando nada mais que aquelas catorze peças. Netz e sua equipe reescreveram uma parte da história da matemática. Tinham todas as peças, a solução matemática possível do tempo antigo, a leitura do tratado, e o contexto histórico. Em suas palavras “... tínhamos um argumento irrefutável demonstrando que, com O *Stomachion*, dispúnhamos da mais antiga evidência existente da ciência combinatória.”(NETZ et al,2009, p. 267).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos iniciar nossas Considerações Finais destacando alguns pontos importantes. A Grécia foi palco do estudo de diversos objetos matemáticos, e a combinatória também não foge da ideia, como alguns pensavam antes. Arquimedes é um matemático que perpetrou diversos estudos e investigações, e o nome mais antigo da análise combinatória, com seu trabalho *O Stomachion*. Mas vale ressaltar que como qualquer estudo histórico sobre qualquer ciência, podemos futuramente encontrar documentos mais antigos e nomes mais esquecidos e então ter uma visão histórica mais abrangente .

Algo que poderemos abordar em futuras pesquisas são algumas possibilidades de uso do *Stomachion* com alunos, e/ou construção de ferramentas didáticas e pedagógicas. Vimos que alguns estudiosos afirmam a história da matemática como importante papel na educação matemática.

O *Stomachion* como um quebra-cabeça similar ao Tangram pode ser de uso criativo para a produção de figuras fantásticas, como já foi abordado. Isto é algo que ajuda a desenvolver a criatividade do estudante.

Outra forma de uso é a do próprio objeto de investigação de Arquimedes. Na busca da solução, encontraremos diversos conceitos matemáticos de diversos campos. Existem trabalhos acadêmicos que envolvem o *Stomachion* com abordagens de assuntos mais avançados também, a exemplo da teoria de Grafos.

Mas para estudos básicos podemos estudar conceitos desde proporção (objeto que a cópia árabe induz); de forma; de reflexão, basta buscar formas de arranjos diferentes do quadrado - algumas peças geram novas configurações por reflexão; congruência de áreas - embora estejam em um arranjo diferente os alunos podem se perguntar se a área continua a mesma; rotações.

Usando determinadas mudanças de peças, seja com rotações, reflexões, e substituições como operações matemáticas, podemos fazer alusões a estudos de isometria, e grupos. As possibilidades aumentam com o passar de observação e manipulação do material.

Consideramos o que aprendemos com este estudo, compreendemos que é possível o utilizar elementos históricos no processo de ensino-aprendizagem de matemática. E isto proporcionará uma relação diferente dos alunos com a disciplina, apresentando uma matemática bela e não tão estática e dura.

REFERÊNCIAS

ACERBI, Fabio. On the Shoulders of Hipparchus. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 57, n. 6, p. 465-502, 2003.

ASSIS, André Koch Torres. **Arquimedes, o centro de gravidade ea lei da alavanca**. Montreal: Apeiron, 2008.

BALESTRI, Rodrigo Dias; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. A história da matemática na formação inicial de professores de matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 3, n. 1, p. 103-120, 2010.

BASTOS, Antonio Carlos. Análise Combinatória Desenvolvida com Aspectos Históricos. **Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática: questões atuais**, v. 1, n. 1, 2014.

BIGGS, Norman L. The roots of combinatorics. **Historia Mathematica**, v. 6, n. 2, p. 109-136, 1979.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Editora Blucher, 2019.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Reflexões sobre a História da Matemática na Formação de Professores. **Revista Brasileira de História da Matemática. Especial**, n. 1, p. 399-406, 2007.

DA SILVA, Edna Lúcia; MENEZES, Estera Muszkat. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. UFSC, Florianópolis, 4ª. Edição, 2005, 123.

DA SILVA, Maria Célia Leme. MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA-POSSÍVEIS LEITURAS DE UMA CRONOLOGIA. **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n. 18, p. 49-63, 2006.

GIL, Antonio Carlos, et al. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

KOLATA, Gina. In Archimedes' puzzle, a new eureka moment. **New York Times**, v. 153, n. 52,697, p. 1, 2003.

MIGUEL, Antonio; BRITO, A. de J. A história da matemática na formação do professor de matemática. **Caderno Cedes**, v. 40, p. 47-61, 1996.

NETZ, Reviel; ACERBI, Fabio; WILSON, Nigel. Towards a reconstruction of Archimedes' Stomachion. **Sciamvs**, v. 5, p. 67, 2004.

NETZ, Reviel; NOEL, William. **CódexArquimedes**. Record, 2009.

WILSON, Robin. Combinatorics: A historical and pedagogical approach. **PALEONTOLOGICAL SOCIETY PAPERS**, v. 6, p. 191-200, 2000

PITOMBEIRA, João Bosco. Princípio da casa dos pombos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 8, p. 21-26, 1986.

TAVARES, Cláudia S.; BRITO, Frederico Reis Marques. Contando a história da contagem. **Revista do professor de Matemática SBM**, v. 57, 2005.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. **Recife: VII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2004.